Metric regularity and nonsmooth constraint systems (Decision Theory and Optimization Algorithms)

関口, 良行

数理解析研究所講究録 1409 巻 2005 年 50-58

Metric regularity and nonsmooth constraint systems

東京工業大学 数理・計算科学専攻　関口 良行 (Yoshiyuki SEKIGUCHI)
Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology
e-mail: Yoshiyuki.Sekiguchi@is.titech.ac.jp

1　はじめに

本稿では微分不可能な目的関数と制約式を持つ最適化問題に対する最適性の必要条件を求める. これを制約集合に対する法線錘また接錘の近似を得ることで達成する. 問題の設定は以下の 2 つの場合に分かれる:

(1) 変数の空間が Asplund 空間で制約集合を定義する写像が連続の場合に法線錘の近似を求める (ラグランジェ乗数定理);

(2) 変数の空間が Banach 空間で制約集合を定義する写像が局所リプシッツ連続の場合に接錘の近似を求める.

ただし微分不可能な写像に対する一般化微分や非凸集合に対する法線錘, 接錘は Rockafellar, Wets[18] と Mordukhovich, Shao[14] の構成に従う. よって本稿で扱う法線錘は一般に凸とは限らない. 微分可能な目的関数と制約式を持つ最適化問題の場合, 最適性の必要条件の代表的なものであるラグランジェ乗数の存在性は Robinson の定理を用いて示すことができる. 証明のながれは制約集合に対する接錘の近似を得てから極関係によって法線錘の近似を求め, それによってラグランジェ乗数の存在を言うのである. しかし制約式が微分不可能または変数制約集合が非凸のとき, 接錘も法線錘も凸にはならないことがある. 従って極関係を用いて接錘から法線錘を求めることはできず, それぞれの錘の近似を個別に求めなければならない. (1) を達成するために劣微分に対する和の公式を用いる. (2) を達成するために制約集合を用いて定義される集合値写像の metric regularity を使う. metric regularity とは方程式の安定性を表すもので, 逆関数定理の帰結から抽出される重要な性質である.

2　法線錘の近似とラグランジェ乗数定理

X を実 Banach 空間とする. もし X の開凸集合上で定義された任意の連続凸関数がその定義域の稠密な G_δ 集合上でフレッシュ微分可能ならば, X は *Asplund* 空間と呼ばれる. 例えばフレッシュ微分可能なノルムを持つ空間や回帰的な空間は Asplund 空間になる. 詳しくは [5] を参照せよ.

X を Asplund 空間とする. C を X の閉集合とし, $\bar{x}$ を C の点とする. このとき X^* の集合を

$$\widehat{N}_C(\bar{x}) = \left\{ x^* \in X^* : \limsup_{\substack{x \xrightarrow{C} \bar{x} \\ x \neq \bar{x}}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leq 0 \right\}$$

で定義し, これを C の $\bar{x}$ におけるフレッシュ法線錘 (Fréchet normal cone) と呼ぶ. ただし $x \xrightarrow{C} \bar{x}$ は x が C 上を通りながら $\bar{x}$ に収束することを表す. またこの集合を用いて作られる X^* の集合

$$N_C(\bar{x}) = \limsup_{x \xrightarrow{C} \bar{x}} \widehat{N}_C(x) = \{x^* \in X : \exists x_k \xrightarrow{C} \bar{x}, x_k^* \to x^* \text{ with } x_k^* \in \widehat{N}_C(x_k)\}$$

を C の $\bar{x}$ における法線錘 (normal cone) と呼ぶ. もし C が凸のとき, 上記 2 つの集合は凸解析における通常の法線錘になる. X から $(-\infty, \infty]$ への下半連続関数 f と f が無限大を取らない点 $\bar{x}$ に対して劣微分 (subdifferential) を

$$\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X : (x^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}f}((\bar{x}, f(\bar{x})))\}$$

で定義する. また Y を Asplund 空間として X から Y への写像 G と X の点 $\bar{x}$, Y^* の点 y^* に対して, 次のように定義された X^* の集合

$$D^*G(\bar{x})(y^*) = \{x^* \in X : (x^*, -y^*) \in N_{\mathrm{gph}G}((\bar{x}, G(\bar{x})))\}$$

を G の $\bar{x}$ における *coderivative* と呼ぶ.

これらの一般化微分を扱うときに重要になってくる性質が次のものである. X の閉集合 C とその点 $\bar{x}$ に対してある $\delta, \gamma > 0$ と X のコンパクト集合 S が存在して,

$$\widehat{N}_C(x) \subset K_\gamma(S) = \{x^* \in X^* : \gamma \|x^*\| \leq \max_{s \in S} |\langle x^*, s \rangle|\}$$

が任意の $x \in B_\delta(\bar{x}) \cap C$ に対して成り立つとき, C は $\bar{x}$ において *normally compact* であるという. この条件は凸集合に対する内点条件に近いもので集合の境界の局所的な正則性を表す. 実際凸集合が内点をもてばすべての点でこの条件が成り立つ. しかし内点条件よりも真に弱い条件である. 例えば空間が有限次元の場合, 任意の閉集合はすべての点でこの条件を満たす. 詳しくは [14], [2] を参照せよ. f を X から $(-\infty, \infty]$ への proper な下半連続関数, $\bar{x}$ を X の点で f が有限値をとる点とする. そのエピグラフが $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ で normally compact のとき, f は $\bar{x}$ において normally compact であるという.

次に法線錘の近似定理を挙げる. 証明は以下の劣微分の和の公式を使用する:

定理 2.1 ([14]). X を *Asplund* 空間, f_i $(i = 1, \ldots, n)$ を X から $(-\infty, \infty]$ への *proper* な下半連続関数とする. もし $f_2, \ldots, f_n$ が $\bar{x} \in \mathrm{dom} f_1 \cap \cdots \cap \mathrm{dom} f_n$ において *normally compact* で, 任意の $x_i^* \in \partial^\infty f_i(\bar{x})$ に対して

$$x_1^* + \cdots + x_n^* = 0 \Rightarrow x_1^* = \cdots = x_n^* = 0$$

が成り立つならば, 次のような包含関係が成り立つ:

$$\partial(f_1+\cdots+f_n)(\bar{x}) \subset \partial f_1(\bar{x})+\cdots+\partial f_n(\bar{x}),$$
$$\partial^\infty(f_1+\cdots+f_n)(\bar{x}) \subset \partial^\infty f_1(\bar{x})+\cdots+\partial^\infty f_n(\bar{x}).$$

空間の Asplund 性は本質的にこの定理を利用するために使われ, 実際この定理がある Banach 空間上の任意の下半連続関数に成り立つことはその空間が Asplund 空間になることと同値になる [8]. 次の定理の証明は [14] から抜き出せる. 本研究ではラグランジェ乗数定理の拡張を目指し変数制約が加えられ, 直接的な証明が与えられている.

定理 2.2. X と Y を *Asplund* 空間, G を X から Y への連続関数, C を X の閉集合, K を Y の閉集合とし, $\mathcal{D}=\{x\in C : G(x)\in K\}$ とする. もし $\mathcal{D}$ の点 $\bar{x}$ に対して, C が $\bar{x}$ において *normally compact* で K が $G(\bar{x})$ において *normally compact* であり、$\bar{x}$ において制約想定

$$(*)\ \begin{cases} \text{任意の } z^*\in N_C(\bar{x}) \text{ と } y^*\in N_K(G(\bar{x})) \text{ に対して,} \\ 0\in D^*G(\bar{x})(y^*)+z^* \text{ならば } y^*=0, z^*=0 \end{cases}$$

が満たされていれば,

$$N_{\mathcal{D}}(\bar{x}) \subset \{D^*G(\bar{x})(y^*)+z^* : y^*\in N_K(G(\bar{x})),\ z^*\in N_C(\bar{x})\}$$

が成り立つ.

系 2.1. X と Y を *Asplund* 空間, f を X から R への局所リプシッツ関数, G を X から Y への連続関数, C を X の閉集合, K を Y の閉集合とし, 最適化問題

$$(\mathcal{P})\ \ \min\ f(x) \quad s.t.\ x\in C,\ G(x)\in K.$$

を考える. $\bar{x}$ を $(\mathcal{P})$ の局所最適解とする. もし C が $\bar{x}$ において *normally compact* で K が $G(\bar{x})$ において *normally compact* であり, $\bar{x}$ において制約想定 $(*)$ が満たされていれば, ある $z^*\in N_C(\bar{x})$ と $y^*\in N_K(G(\bar{x}))$ が存在して,

$$0\in\partial f(\bar{x})+D^*G(\bar{x})(y^*)+z^*$$

が成り立つ.

例. もし写像 f と G が連続 Fréchet 微分可能で $C=X$, K が錘のとき, 系 2.1 の帰結にある包含関係は

$$\nabla f(\bar{x})+\nabla G(\bar{x})^* y_0^*=0;$$
$$\langle y_0^*, G(\bar{x})\rangle = 0$$

となり, 通常の Karush-Kuhn-Tucker の定理の帰結と同様になる. ただしここでは空間に Asplund 性を仮定しており空間の条件を強くしている一方で, K に内点条件を課しておらずより弱い局所的な条件のみを課している.

例. $X=R^n$, $Y=R^m$, $f_i\colon X\to R$, $(i=0,\ldots,m)$ を C^1 級関数として, 最小化問題

$$\min\ f(x)\quad \text{s.t. } f_i(x)\leq 0,\ i=1,\ldots,p,\ f_i(x)=0,\ p+1,\ldots,m$$

を考える. ここで $G(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))$, $K=R^p_-\times\{0\}^m$ とすると, 制約集合は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}&=\{x\in X: f_i(x)\leq 0,\ i=1,\ldots,p,\ f_i(x)=0,\ p+1,\ldots,m\}\\&=\{x\in X: G(x)\in K\}\end{aligned}$$

で与えられる. いま $x\in X$, $y\in Y$ に対して,

$$\begin{aligned}&D^*G(x)(y)=\nabla G(x)^*y=\sum_{i=1}^m y_i\nabla f_i(x)\\&N_C(x)=N_X(x)=\{0\}\\&y\in N_K(G(x))\ \Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\leq 0,\ y_i\geq 0 \text{ かつ } y_if(x)=0,\ i=1,\ldots,p\\ f(x)=0,\ i=p+1,\ldots,m\end{cases}\end{aligned}$$

となる. また $\mathcal{D}$ の点 $\bar{x}$ における制約想定 $(*)$ は, 任意の $y\in N_K(G(\bar{x}))$ に対して,

$$\sum_{i=1}^m y_i\nabla f_i(\bar{x})=0 \text{ ならば } y_i=0$$

が成り立つと書き換えられる (Mangasarian-Fromovitz 制約想定と同値). この制約想定が $\bar{x}$ で成り立つとき, 有限次元空間の任意の閉集合は normally compact なので, 定理 2.2 より法線錐は

$$N_{\mathcal{D}}(\bar{x})\subset\{\sum_{i=1}^m y_i\nabla f_i(\bar{x}): y_i\geq 0,\ y_if_i(\bar{x})=0,\ i=1,\ldots,p\}$$

と近似される. 従ってこの $\bar{x}$ が上記の最小化問題の局所最適解ならば, ある $y\in R^m$ が存在して

$$\begin{aligned}-\nabla f(\bar{x})&=\sum_{i=1}^m y_i\nabla f_i(\bar{x});\\ y_i\geq 0 \text{ かつ } &y_if_i(\bar{x})=0,\ i=1,\ldots,p\end{aligned}$$

が成り立つ. よって通常の Karush-Kuhn-Tucker の定理と同様の結論が得られる.

3 接錘の近似

接錘は実 Banach 空間において扱う. ここでの構成は [18] のものに従う. X を実 Banach 空間とする. X の閉集合 C と C の点 $\bar{x}$ に対して X の集合

$$T_C(\bar{x})=\{x\in X:\exists t_n\searrow 0, x_n\xrightarrow{C}\bar{x}\text{ s.t. } x=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\bar{x}}{t_n}\}$$

を C の $\bar{x}$ における接錐 (Tangent cone) と呼ぶ. ここで $t_n \searrow 0$ は t_n が $t_n > 0$ を満たしながら 0 に収束することを表す. また

$$\widetilde{T}_C(\bar{x}) = \{x \in X : \forall t_n \searrow 0,\ \exists x_n \in C \text{ s.t. } x = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \bar{x}}{t_n}\}$$

を *derivable cone* と呼び,

$$\widehat{T}_C(\bar{x}) = \{x \in X : \forall t_n \searrow 0,\ z_n \xrightarrow{C} \bar{x}, \exists x_n \xrightarrow{C} \bar{x} \text{ s.t. } x = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - z_n}{t_n}\}$$

を *regular tangent cone* と呼ぶ. 定義より $\widehat{T}_C(\bar{x}) \subset \widetilde{T}_C(\bar{x}) \subset T_C(\bar{x})$ が成り立つ. もし $\widetilde{T}_C(\bar{x}) = T_C(\bar{x})$ ならば, C は $\bar{x}$ において *geometrically derivable* であるいい, もし $\widehat{T}_C(\bar{x}) = T_C(\bar{x})$ ならば C は $\bar{x}$ において *regular* であるという. たとえば C が凸のとき C はすべての点で regular であり, よって geometrically derivable である. ただし geometrically derivable は regular より真に弱い条件である. 実際 $X = R^3$, $C = \{(x,y,z) \in R^3 : x \leq 0,\ -1 \leq y \leq 1,\ z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in R^3 : x \geq 0,\ -1 \leq y \leq 1,\ z = -x\}$ の時, $\bar{u} = (0,0,0)$ とすると

$$\begin{aligned} T_C(\bar{u}) &= \widetilde{T}_C(\bar{u}) = \{(x,y,z) : x \leq 0, z = 0\} \cup \{(x,y,z) : x \geq 0, z = -x\}; \\ \widehat{T}_C(\bar{u}) &= \{(x,y,z) : x = 0, z = 0\} \end{aligned}$$

となり, C は $\bar{u}$ で geometrically derivable であるが regular ではない.

つぎに関数に対する一般化微分を定義する. f を X から $(-\infty, \infty]$ への下半連続関数とし, X の点 $\bar{x}$ を f が有限値を取る点とする. X から $[-\infty, \infty]$ への関数を

$$df(\bar{x})(\bar{w}) = \liminf_{\substack{\tau \searrow 0 \\ w \to \bar{w}}} \frac{f(\bar{x} + \tau w) - f(\bar{x})}{\tau}$$

で定義し, *subderivative* と呼び,

$$\widehat{d}f(\bar{x})(\bar{w}) = \lim_{\delta \searrow 0} \left(\limsup_{\substack{x \xrightarrow{f} \bar{x} \\ \tau \searrow 0}} \left[\inf_{\|w - \bar{w}\| \leq \delta} \frac{f(x + \tau w) - f(x)}{\tau} \right] \right)$$

を *regular derivative* と呼ぶ. このときこれらの微分は

$$\begin{aligned} \mathrm{epi}df(\bar{x}) &= T_{\mathrm{epi}f}((\bar{x}, f(\bar{x}))); \\ \mathrm{epi}\widehat{d}f(\bar{x}) &= \widehat{T}_{\mathrm{epi}f}((\bar{x}, f(\bar{x}))) \end{aligned}$$

という幾何的な関係を持つ.

写像の場合は次のようにする. Y を Banach 空間とし G を X から Y への写像とする. このとき X の点 $\bar{x}$ に対して X から Y への集合値写像を

$$DG(\bar{x})(v) = \{w \in Y : (v, w) \in T_{\mathrm{gph}G}((\bar{x}, G(\bar{y})))\}$$

で定義し G の $\bar{x}$ における微分と呼び,

$$\widetilde{D}G(\bar{x})(v) = \{w \in Y : (v, w) \in \widetilde{T}_{\mathrm{gph}G}((\bar{x}, G(\bar{x})))\}$$

を *proto-derivative*,

$$\widehat{D}G(\bar{x})(v) = \{w \in Y : (v, w) \in \widehat{T}_{\mathrm{gph}G}((\bar{x}, G(\bar{x})))\}$$

を *regular derivative* と呼ぶ. *proto-derivative* は [16] で定義された. もし任意の X の点 v に対して $DG(\bar{x})(v) = \widehat{D}G(\bar{x})(v)$ のとき, G は $\bar{x}$ で *proto-differentiable* であるという. とくに G が $\bar{x}$ において方向微分可能なとき proto-differentiable である.

次に metric regularity の定義をする. 無限次元空間の逆関数定理に以下のようなものがある. X と Y を Banach 空間, F を X から Y への写像とする. もし X の点 $\bar{x}$ で F が strictly differentiable であり $\nabla F(\bar{x})$ が全射ならば, ある $K > 0$ が存在して

(1) $(\bar{x}, F(\bar{x}))$ に十分近い (x, y) で $d(x, F^{-1}(y)) \leq K\|y - F(x)\|$

(2) $\bar{x}$ に十分近い x と任意の $t > 0$ で $B_t(F(x)) \subset F(B_{Kt}(x))$

「与えられた y に対して, $F(x) = y$ を満たす x を見つける」という問題を考えたとき, 上の性質 (1) は y に摂動を加えたときの解集合の安定性を表し, (2) は方程式の可解性を表す. Robinson は最適化問題でよく使われる集合値写像に適用できるようにこの定理を拡張した:

定理 3.1. *X と Y を Banach 空間, C を X の閉凸集合, K を Y の閉凸錘, G を X から Y への strictly differentiable な写像とする. X から Y への集合値写像を*

$$F(x) = \begin{cases} G(x) + K, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C \end{cases}$$

で定義する. もし X の点 $\bar{x}$ が $0 \in G(\bar{x}) + K$ を満たし, $0 \in \mathrm{int}[G(\bar{x}) + \nabla G(\bar{x})(C - \bar{x}) + K]$ が成り立つならば, ある $K > 0$ が存在して, $(\bar{x}, 0)$ に十分近い (x, y) に対して

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq Kd(y, F(x))$$

が成り立つ.

最適化問題の制約集合はしばしば $\mathcal{D} = \{x \in C : -G(x) \in K\}$ のように表される. このとき制約集合の正則性の議論を摂動を加えた集合 $\mathcal{D}_y = \{x \in C : y \in G(x) + K\}$ の解析を通して行うことができる. 上の定理の中で定義された集合値写像 F はこの集合に対して $F^{-1}(y) = \mathcal{D}_y$ という関係を持つ. 定理の帰結は, (x, y) が $(\bar{x}, 0)$ に十分近いとき x から $\mathcal{D}_y$ までの距離が y から $F(x)$ までの距離で一様に抑えられるという制約集合の摂動に対するある種の安定性を表している. この性質を metric regularity という. 正確には以下のように定義される.

定義. X と Y を距離空間, F を X から Y への集合値写像, $(\bar{x},\bar{y})$ を F のグラフの点とする. もしある $K>0$ が存在して $(\bar{x},\bar{y})$ に十分近い (x,y) に対して,

$$d(x,F^{-1}(y)) \le Kd(y,F(x))$$

が成り立つとき, F は $(\bar{x},\bar{y})$ において *metric regularity* を持つという.

実際は F が metric regularity を持つことと定理 3.1 の条件は同値であることが示せる [4]. また変数制約がないとき, つまり C が X に等しいとき定理 3.1 の条件は Mangasarian-Fromovitz の制約想定と同値になる. 節 2 より特に X と Y が有限次元のとき, G が微分不可能で C や K が非凸集合でも法線錘の近似が得られたのであるが, さらに制約想定 $(*)$ が F が metric regularity を持つための十分条件になっていることも示すことができる:

定理 3.2. *X と Y が有限次元ベクトル空間, G が X から Y への連続写像, C が X の閉集合, K が Y の閉集合のとき $\mathcal{D}=\{x\in C : G(x)\in K\}$ とする. X から Y への集合値写像を*

$$F(x)=\begin{cases} G(x)+K, & x\in C;\\ \emptyset, & x\notin C\end{cases}$$

で定義する. このとき $\mathcal{D}$ の点 $\bar{x}$ に対して制約想定 $(*)$ が成り立つとする; i.e.

$$(*)\quad \begin{cases} \text{任意の } z\in N_C(\bar{x}) \text{ と } y\in N_K(G(\bar{x})) \text{ に対して},\\ 0\in D^*G(\bar{x})(y)+z \text{ ならば } y=0, z=0.\end{cases}$$

このとき F は $(\bar{x},0)$ で metric regularity を持つ.

この節では F の metric regularity を仮定した上でどのような接錘の近似が求まるかを考察する. 1986 年に Borwein[1] によって以下のような定理が証明されている.

定理 3.3 (Borwein). *X と Y を Banach 空間, C を X の閉集合, K を Y の閉集合とし G を X から Y への strictly differentiable な写像とする. また*

$$\mathcal{D}=\{x\in C : G(x)\in K\},\quad F(x)=\begin{cases} G(x)+K, & x\in C;\\ \emptyset, & x\notin C\end{cases}$$

とし, $\bar{x}$ を $\mathcal{D}$ の点とすると

$$T_{\mathcal{D}}(\bar{x})\subset\{w\in T_C(\bar{x}) : \nabla G(\bar{x})w\in T_K(G(\bar{x}))\}$$

が成り立つ. もし F が $(\bar{x},0)$ において metric regularity をもつならば

$$\widehat{T}_{\mathcal{D}}(\bar{x})\supset\{w\in \widehat{T}_C(\bar{x}) : \nabla G(\bar{x})w\in \widehat{T}_K(G(\bar{x}))\}.$$

その上, C と K がそれぞれ $\bar{x}$ と $G(\bar{x})$ で regular ならば, $\mathcal{D}$ は $\bar{x}$ で regular であり

$$T_{\mathcal{D}}(\bar{x})=\{w\in T_C(\bar{x}) : \nabla G(\bar{x})w\in T_K(G(\bar{x}))\}$$

が成り立つ.

この定理は微分不可能な写像や regular でない集合に対して以下のように拡張できる.

定理 3.4. X と Y を *Banach* 空間, C を X の閉集合, K を Y の閉集合とし G を X から Y への写像とする. また

$$\mathcal{D} = \{x \in C : G(x) \in K\}, \quad F(x) = \begin{cases} G(x) + K, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C \end{cases}$$

とする. $\bar{x}$ を $\mathcal{D}$ の点とし, G が $\bar{x}$ で局所リプシッツ連続ならば,

$$T_{\mathcal{D}}(\bar{x}) \subset \{w \in T_C(\bar{x}) : \widetilde{D}G(\bar{x})(w) \in T_K(G(\bar{x}))\}$$

が成り立つ. もし F が $(\bar{x}, 0)$ において *metric regularity* をもつならば

$$T_{\mathcal{D}}(\bar{x}) \supset \{w \in \widetilde{T}_C(\bar{x}) : DG(\bar{x})(w) \in \widetilde{T}_K(G(\bar{x}))\}.$$

その上, C と K がそれぞれ $\bar{x}$ と $G(\bar{x})$ で *geometrically derivable* かつ G が $\bar{x}$ で *proto-differentiable* ならば, $\mathcal{D}$ は $\bar{x}$ で *geometrically derivable* であり

$$T_{\mathcal{D}}(\bar{x}) = \{w \in T_C(\bar{x}) : \nabla G(\bar{x})(w) \in T_K(G(\bar{x}))\}$$

が成り立つ.

これを用いて次のような最小化問題の最適性の必要条件が求まる.

系 3.1. X, Y, G, C, K, $\mathcal{D}$, F に定理 *3.4* と同様の仮定をする. さらに f を X から R への局所リプシッツ連続関数として, 最小化問題

$$(\mathcal{P}) \quad \inf \ f(x) \quad s.t. \ x \in \mathcal{D}$$

を考える. もし $\bar{x}$ が $(\mathcal{P})$ の局所最適解で F が $(\bar{x}, 0)$ で *metric regularity* を持つならば

$$\widehat{d}f(\bar{x})(w) \geq 0, \ \forall w \in \widetilde{T}_A(\bar{x}) \cap DF(\bar{x})^{-1}\widetilde{T}_B(F(\bar{x}))$$

が成り立つ.

参考文献

[1] J. M. Borwein, *Stability and regularity of inequality systems*, J. Optim. Theory Appl. **48** (1986), 9–52.

[2] J. M. Borwein, Y. Lucet and B. Mordukhovich, *Compactly epi-Lipschitzian convex sets and functions in normed spaces*, J. Convex Anal. **7** (2000), 375–393.

[3] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Université de Montréal, Centre de recherches mathématiques, Montreal, 1989.

[4] R. Cominetti, *Metric regularity, tangent sets, and second-order optimality conditions*, Appl. Math. Optim. **21** (1990), 265–287.

[5] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

[6] A. L. Dontchev, *The Graves theorem revisited*, J. Convex Anal. **3** (1996) 45–53.

[7] A. L. Dontchev, A. S. Lewis and R. T. Rockafellar, *The radius of metric regularity* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2002) 493–517.

[8] M. Fabian and B. Mordukhovich, *Nonsmooth characterizations of Asplund spaces and smooth variational principles*, Set-Valued anal. **6** (1998) 381–406.

[9] A. D. Ioffe, *Metric regularity and subdifferential calculus*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 501–558.

[10] A. Jourani and L. Thibault, *Approximations and metric regularity in mathematical programming in Banach spaces*, Math. Oper. Res. **18** (1993), 390–401.

[11] A. Jourani and L. Thibault, *Verifiable conditions for openness and regularity of multivalued mapping in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1255–1268.

[12] L. A. Lyusternik and V. J. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1961.

[13] B. S. Mordukhovich, *Complete characterization of openness, metric regularity and Lipschitzian properties of multifunctions*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 1–35.

[14] B. S. Mordukhovich and Y. Shao, *Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 1235–1280.

[15] S. M. Robinson, *Stability theory for systems of inequalities, Part II: Differentiable nonlinear systems*, SIAM J. Numer. Anal. **13** (1976), 497–513.

[16] R. T. Rockafellar, *Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions*, Can. J. Math. **32** (1980), 257–280.

[17] R. T. Rockafellar, *Proto-differentiability of set-valued mappings and its applications in optimization*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **6** (1989), 449–482.

[18] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational analysis*, Springer-Verlag, Berlin 1997.